Numeri complessi

$x^2+1=0$ non ha soluzione $\forall x \in \mathbb{R}$

definiamo un numero i t.c.

$$i^2 = -1 .$$

allora i risolve l'equazione $x^2+1=0$.

Un numero complesso è generato da una coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$.

Si scrive

$$z = a + ib$$

Si possono sommare e moltiplicare ricordando che $i^2 = -1$.

Es: $(3+5i)+(1-2i) = 3+1+5i-2i$

$= 4+3i$

$(-3+i)(2+4i) = -6-12i+2i+4i^2 =$

$= -6-10i+4(-1) = -10-10i$

Se $z = a + ib$ si dice che a è la parte reale di z e che b è la parte immaginaria di z.

Si scrive

$$a = \mathrm{Re}(z), \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$.

Facciamo vedere che un polinomio di secondo grado ha sempre 2 radici in $\mathbb{C}$.

$$x^2 + 6x + 13 = 0$$

$$x^2 + 6x + 13 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 13 =$$

$$= (x+3)^2 + 4 = (x+3)^2 - (2i)^2 =$$

$$\boxed{\begin{aligned} &a^2 - b^2 = \\ &= (a+b)(a-b) \end{aligned}}$$

$$= (x+3+2i)(x+3-2i)$$

il prodotto si annulla quando

$x = -3-2i$ oppure $x = -3+2i$

le radici del polinomio sono

$z_1 = -3-2i \qquad z_2 = -3+2i$

Si possono trovare anche usando la formula risolutiva.

$x^2+6x+13=0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} =$$

$$= \frac{-6 \pm \sqrt{i^2 \cdot 16}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = \begin{cases} -3+2i \\ -3-2i \end{cases}$$

Def: Dato $z = a+ib$ il numero complesso $\bar{z} = a-ib$ si dice **coniugato** di z.

Oss: Se un polinomio di grado 2 non ha radici in $\mathbb{R}$ allora ha 2 radici coniugate in $\mathbb{C}$.

Polinomio caratteristico senza radici reali.

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

senza radici reali.

$\Rightarrow$ ci sono due radici complesse coniugate.

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad , \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

Le soluzioni fondamentali sono

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

Es: $y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda = \pm i$

$\alpha = 0 \,, \; \beta = \pm 1 .$

$\lambda_1 = \underset{\alpha}{0} + \underset{\beta}{1} \cdot i \qquad \lambda_2 = 0 - 1 \cdot i$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{-0 \pm \sqrt{0 - 4 \cdot 1}}{2}$$

$$= \frac{0 \pm 2i}{2} = \begin{cases} 0 + i \\ 0 - i \end{cases}$$

$$y_1 = e^{0 \cdot x} \cos(1 \cdot x), \quad y_2(x) = e^{0 \cdot x} \sin(1 \cdot x)$$

$$\Rightarrow y_1 = \cos x \quad y_2 = \sin x .$$

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Es: $$y'' - 4y' + 13y = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-13}}{1} = \frac{2 \pm \sqrt{-9}}{1} =$$

$$= 2 \pm 3i$$

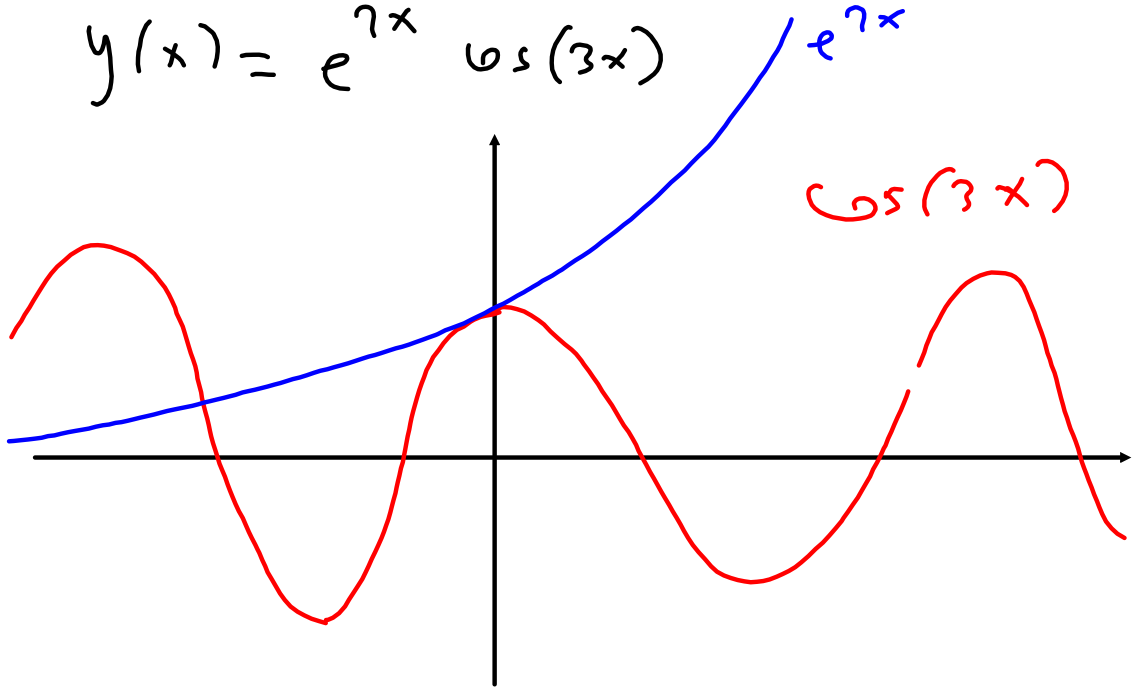
$\alpha = 2 \qquad \beta = 3$

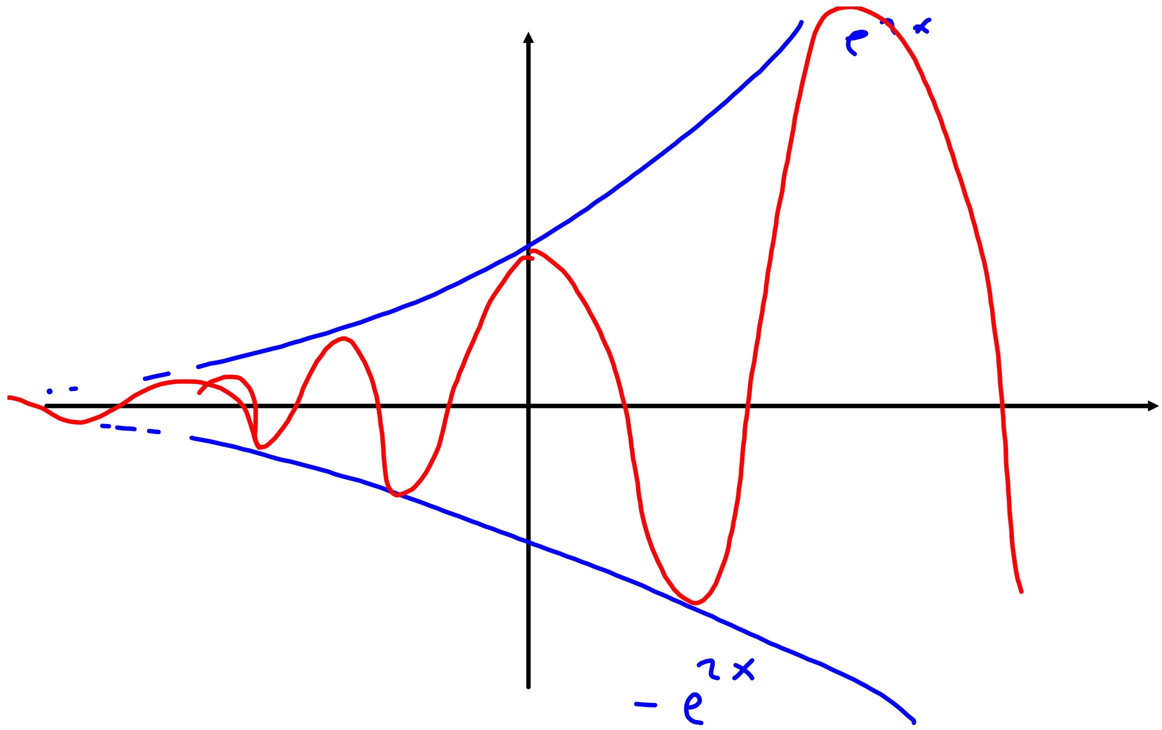
$y_1(x) = e^{2x} \cos(3x)$

$y_2(x) = e^{2x} \sin(3x)$

___________ - ______

$$y(x) = e^{?x} \cos(3x)$$





e^{2x}
$-e^{2x}$

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1$$

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$

trovare c_1 e c_2.

$$y(0) = c_1 \cdot 1 \cdot 1 + \cancel{c_2 \cdot 1 \cdot 0} = 2$$

$$\Rightarrow c_1 = 2$$

$$y' = c_1 e^x \cos x + c_1 e^x \cancelto{0}{(-\sin x)} +$$

$$+ c_2 e^x \cancelto{0}{\sin x} + c_2 e^x \cos x$$

per $x = 0$

$$y'(0) = c_1 \cdot 1 \cdot 1 - c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + $$
$$+ c_2 \cdot 1 \cdot 1 = c_1 + c_2$$

$$y'(0) = 1 \longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

$$c_2 = 1 - c_1 = 1 - 2 = -1$$

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x =$$
$$= \boxed{2e^x \cos x - e^x \sin x}$$

Equazione completa
(non omogenea)

$$y'' + ay' + by = f \quad (*)$$

Supponiamo di avere una soluzione $\bar{y}$ di $(*)$ e di avere y_0 soluzione dell'omogenea ciò è

$$y_0'' + a y_0' + b y_0 = 0$$

Poniamo $y = \bar{y} + y_0$

$$\Rightarrow \quad y'' + a y' + b y =$$

$$(\bar{y}'' + y_0'') + a(\bar{y}' + y_0') + b(\bar{y} + y_0) =$$

$$= \underbrace{(\bar{y}'' + a\bar{y}' + b\bar{y})}_{f} + \underbrace{(y_0'' + a y_0' + b y_0)}_{0} =$$

$= f + 0 = f$

quindi y risolve l'equazione completa.

Viceversa. Se $\bar{y}$ e $\tilde{y}$ sono due soluzioni dell'eq. completa

$\Longrightarrow$ pongo $y = \bar{y} - \tilde{y}$

$$y'' + ay' + by =$$

$$= (\bar{y}'' - \tilde{y}'') + a(\bar{y}' - \tilde{y}') + b(\bar{y} - \tilde{y}) =$$

$$= (\bar{y}'' + a\bar{y}' + b\bar{y}) - (\tilde{y}'' + a\tilde{y}' + b\tilde{y}) =$$

$$= f - f = 0$$

Quindi tutte le soluzioni dell'equazione completa sono del tipo

$$y(x) = y_0 + \bar{y}$$

dove y_0 risolve l'omogenea

e $\bar{y}$ risolve la completa

$\bar{y}$ si dice <u>soluzione particolare</u>

Come si trova $\bar{y}$?

Metodo di somiglianza

si applica a f di un tipo particolare.

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x)\right]$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, p, q polinomi.

se $\alpha = 0$, $\beta = 0$ $\Rightarrow$ f = polinomio

se $\beta = 0$, $p = 1$ $\Rightarrow$ f = esponenz.

se $\alpha = 0$, $p = 1$, $q = 1$ $\Rightarrow$ f = trigonom.

Si cerca una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(x) = x^m e^{\alpha x}\left[r(x)\cos(\beta x) + s(x)\sin(\beta x)\right]$$

r, s sono polinomi e

$$\text{grado}(r) = \text{grado}(s) = \max\{\text{grado}(p), \text{gr}(q)\}$$

m è la molteplicità di $\alpha + i\beta$ come radice del polinomio caratteristico.

Se $\alpha + i\beta$ non è radice
allora $m = 0$.

Oss: $(\lambda - 1)^2$ ha radice
$\lambda = 1$ con molteplicità 2.

Es: $y'' + 4y = \sin x$

1) risolvo l'omogenea

$$y'' + 4y = 0$$

polin. caratt. $\lambda^2 + 4 = 0$

$$\lambda = \pm 2i$$

$$y_0(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

soluzione omogenea.

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[p(x)\cos(\beta x) + q(x)\sin(\beta x)\right]$$

$$\alpha = 0 \qquad \beta = 1 \qquad p \equiv 0$$

$$q(x) = 1 \qquad \text{grado } p = \text{grado } q = 0$$

$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 1 = i$

i non è radice del polin. caratteristico $\Rightarrow m = 0$

Cerco una soluzione

$$\bar{y}(x) = e^{\alpha x} \cdot x^m \left[r(x)\cos(\beta x) + s(x)\sin(\beta x) \right]$$

grado(r) = grado$(s) = 0$

$$\bar{y} = e^{0 \cdot x} \cdot x^0 \left[A\cos x + B\sin x \right]$$

$$\underbrace{A}_{r(x)} \qquad \underbrace{B}_{s(x)}$$

$$= A\cos x + B\sin x$$

devo determinare A e B.

Calcolo $\bar{y}'$ e $\bar{y}''$ e li sostituisco nell'equazione completa.

$$\bar{y}' = -A\sin x + B\cos x$$

$$\bar{y}'' = -A\cos x - B\sin x$$

eq. completa

$$\bar{y}'' + 4\bar{y} = \sin x$$

$$\underbrace{\left(-A\cos x - B\sin x\right)}_{\bar{y}''} + 4\overbrace{\left(A\cos x + B\sin x\right)}^{\bar{y}}$$

$$= \sin x$$

$3A \cos x + 3B \sin x = 1 \sin x + 0 \cdot \cos x$

uguaglio i coeff. di $\cos x$

e di $\sin x$.

$$\begin{cases} 3A = 0 \\ 3B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} A = 0 \\ B = \frac{1}{3} \end{array}$$

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{3} \sin x = (A \cos x + B \sin x)$$

$\Rightarrow$ soluzione è

$$y = y_0 + \bar{y} =$$

$$= c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin x$$

Es: $y'' + 4y = \sin(2x)$

omogenea $y'' + 4y = 0$

$\lambda = \pm 2i$

$y_0 = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$.

$f(x) = \sin(2x)$

$\alpha = 0, \ p \equiv 0, \ q \equiv 1, \ \beta = 2$

$\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 2 = 2i$

$2i$ è radice del polinomio caratteristico con molteplic. 1

$\Rightarrow m = 1$.

$\Rightarrow \bar{y}(x) = x^m \cdot e^{\alpha x}\left(r(x)\cos(\beta x) + s(x)\sin(\beta x)\right)$

$= x\,(A\cos(2x) + B\sin(2x))$

$$\bar{y}' = A\cos(2x) + B\sin(2x) +$$
$$+ \, x\left(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)\right)$$

$$\bar{y}'' = \underline{-2A\sin(2x)} + \underline{2B\cos(2x)} +$$
$$\left(\underline{-2A\sin(2x)} + \underline{2B\cos(2x)}\right) +$$
$$+ \, x\left(-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)\right.$$

sostituisco in

$$\bar{y}'' + 4\bar{y} = \sin(2x)$$

$$-4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) \cancel{-4Ax\cos(2x)}$$

$$\cancel{-4Bx\sin(2x)} +$$

$$+4\left(\cancel{Ax\cos(2x)} + \cancel{Bx\sin(2x)}\right) = \sin(2x)$$

$$\begin{cases} -4A = 1 \\ 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{4} x \cos(2x)$$

$$\bar{y} = A x \cos(2x) + B x \sin(2x)$$

$A = -\frac{1}{4}$ $\quad$ $B = 0$

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) - \frac{1}{4} x \cos(2x)$$

risolve

$$y'' + 4y' = \sin(2x)$$